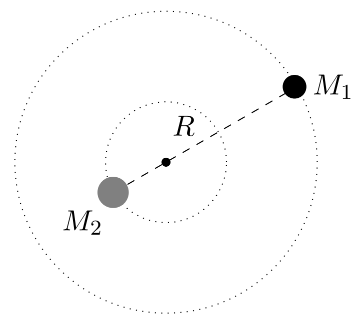
FS-1112: SEGUNDO PARCIAL

Universidad Simón Bolívar
Enero-Marzo 2017
Sartenejas, 01 de marzo de 2017

Nombre:____. Carnet:__________________. Sección:______.

Parte I: Selección simple (14 puntos). A continuación se presentan 7 planteamientos de selección simple con un valor de 2 puntos cada uno. Marque con una X la opción que considere correcta de cada planteamiento. Justifique cada una de las respuestas que haya escogido. Una opción marcada sin justificación será considerada como incorrecta. Cada planteamiento tiene una única respuesta correcta. Si marca más de una opción por planteamiento, será considerado como respuesta incorrecta. No hay factor de corrección.

Dos planetas M_1 y $M_2 = 3M_1$, orbitan, uno alrededor del otro, en trayectorias circulares bajo la acción de su atracción gravitatoria. Es conocido que la rapidez angular de revolución de M_1 es ω_1. La distancia que separa al centro de ambos planetas vale R. El sistema se encuentra completamente aislado y el centro de masa del mismo se encuentra en reposo. Ver figura adjunta. Utilice esta información para responder los siguientes dos planteamientos:

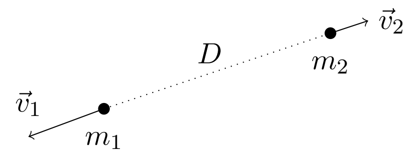


1. (2 pts.) La rapidez angular de M_2 en su órbita es:
(X) ω_1
( ) $3\omega_1$
( ) $\frac{3}{4}\omega_1$
( ) $\frac{4}{3}\omega_1$
( ) Ninguna de las anteriores.

2. (2 pts.) Suponga que f_2 es la frecuencia de rotación de M_2 en su órbita. La rapidez de M_2 es:
(X) $\frac{\pi}{2} Rf_2$
( ) $\frac{\pi}{4} Rf_2$
( ) $\frac{3\pi}{2} Rf_2$
( ) $\frac{3\pi}{4} Rf_2$
( ) Ninguna de las anteriores.

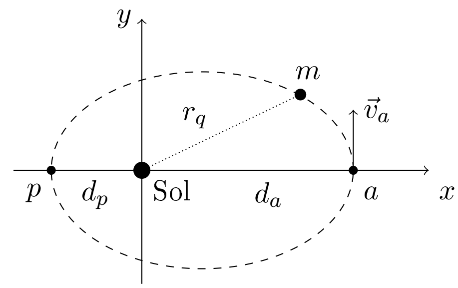
3. (2 pts.) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
( ) $\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0}$ y $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ sobre un rígido garantizan que el mismo se encuentre estático.
( ) Si un rígido que se encuentra estático, su centro de masa no se mueve.
( ) Si el centro de masa de un rígido no se mueve respecto a tierra es porque el rígido se encuentra estático.
( ) Un rígido que se encuentre estático tiene velocidad angular nula.
(X) Todas las anteriores son falsas.

4. (2 pts.) Dos partículas de masa m_1 y $m_2 = 5m_1$ se encuentran inicialmente a una distancia D, alejándose con una rapidez relativa $v_o = \sqrt{6\frac{Gm_1}{D}}$. Vea la figura adjunta. ¿Qué rapidez relativa tendrán cuando se encuentren alejadas a una distancia $4D$?



( ) 0
( ) $\sqrt{\frac{3}{4}\frac{Gm_1}{D}}$
( ) $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{Gm_1}{D}}$
( ) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{Gm_1}{D}}$
(X) Ninguna de las anteriores.

Un cometa de masa m orbita alrededor del Sol, masa $M_S >> m$, en una trayectoria elíptica cuya relación entre las distancias del afelio (a) y el perihelio (p) medidas desde el Sol es $d_p = \frac{1}{7}d_a$. La velocidad del cometa en el afelio $\vec{v}_a$ es conocida. Vea la figura. Con esta información, responda los dos siguientes planteamientos:



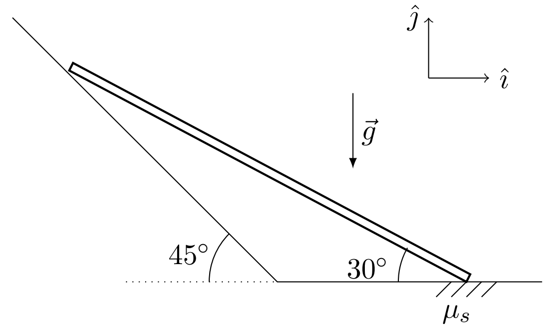
5. (2 pts.) La velocidad del cometa en el perihelio es:
( ) $7\,\vec{v}_a$
( ) $\frac{1}{7}\,\vec{v}_a$
(X) $-7\,\vec{v}_a$
( ) $-\frac{1}{7}\,\vec{v}_a$
( ) Ninguna de las anteriores.

6. (2 pts.) En la figura se muestra a m cuando se encuentra a una distancia r_q. Suponga que la rapidez de m cuando se encuentra en dicho punto es $v_q = 3v_a$. La distancia r_q es:
( ) $\frac{3}{7}d_a$
( ) $\frac{GM_s d_a}{GM_s + d_a v_a^2}$
(X) $\frac{GM_s d_a}{GM_s + 4d_a v_a^2}$
( ) $\frac{1}{3}d_a$
( ) Ninguna de las anteriores.

7. (2 pts.) Dos satélites artificiales de masas m_1 y $m_2 = 2m_1$, rotan alrededor de la Tierra en órbitas circulares con radios R_1 y $R_2 = 9R_1$, respectivamente. La relación entre la rapidez v_1 de m_1 y la de la rapidez v_2 de m_2 en sus órbitas es:
( ) $v_2 = 2\,v_1$
(X) $v_2 = \frac{1}{3}\,v_1$
( ) $v_2 = \frac{2}{3}\,v_1$
( ) $v_2 = \frac{1}{2}\,v_1$
( ) Ninguna de las anteriores.

Parte II: Problema de desarrollo (11 puntos). A continuación se presenta un problema que debe desarrollar. Justifique cada argumento siendo coherente, claro, conciso, ordenado y escribiendo con letra legible.

8. Una barra de masa M y longitud L se encuentra inclinada a 30° sobre la horizontal, apoyada en dos puntos sobre el suelo y un plano inclinado 45° de la horizontal. Observe la figura adjunta. El sistema se mantiene completamente estático. El plano inclinado es perfectamente liso y no ejerce fricción sobre la barra. Sin embargo, existe fricción entre el suelo y la barra; el coeficiente de roce asociado es $\mu_s = \frac{7}{10}$. Calcule:



(a) (4 pts.) El módulo de la normal ejercida por el plano inclinado sobre la barra.

(b) (3 pts.) La normal que ejerce el suelo sobre la barra.

(c) (4 pts.) La fricción $\vec{f_r}$ ejercida por el suelo sobre la barra.

Respuestas:

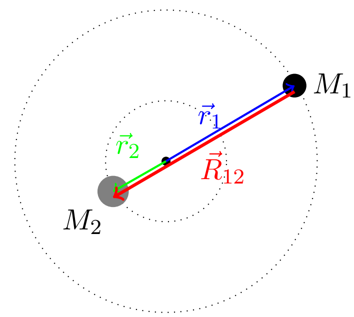
$$N_i = \frac{Mg}{2\sqrt{2}} \qquad N_p = \frac{3}{4}Mg \qquad \vec{f_r} = \frac{1}{4}Mg(-\hat{\imath})$$

Explicaciones

1. Obligatoriamente ambos planetas deben barrer el mismo ángulo en la misma cantidad de tiempo; es decir, deben tener iguales ω, pues de lo contrario ya el centro de masa no estaría en la línea que los une, contradiciendo el hecho de que nos dicen que no hay fuerzas externas y que el centro de masa está en reposo. Entonces $\boxed{\omega_2 = \omega_1}$.

---

2. Recordemos que $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\frac{v}{r}}{2\pi} \Rightarrow v = 2\pi r f$. Como depende de r, debemos hallar el radio de órbita del planeta.

   Si consideramos a $\vec{R}_{12}$ como el vector que va de M_1 a M_2, de magnitud R, tenemos que $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 - \vec{R}_{12}$ (ver figura a la derecha).

   Además, tomando el centro de masa como el origen, tenemos que

   $$\vec{r}_{CM} = \vec{0} = \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M_1 + M_2} \Rightarrow M_1\vec{r}_1 = -M_2\vec{r}_2 \Rightarrow M_1(\vec{r}_2 - \vec{R}_{12}) = -3M_1\vec{r}_2$$
   $$\Rightarrow \vec{r}_2 = \frac{1}{4}\vec{R}_{12}$$

   Como $||\vec{R}_{12}|| = R$, entonces $||\vec{r}_2|| = \frac{1}{4}||\vec{R}_{12}|| = \frac{1}{4}R$. Dado que ya tenemos el radio de órbita, podemos hallar la rapidez:

   $$v_2 = 2\pi r_2 f_2 = 2\pi\left(\frac{1}{4}R\right) f_2 \implies \boxed{v_2 = \frac{\pi}{2} R f_2}$$

---

3. Sabemos que un rígido está estático cuando $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, $\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{0}$, $\vec{v} = 0$ y $\vec{\omega} = 0$, donde $\vec{v}, \vec{\omega}$ están medidos **respecto a tierra**. Por lo tanto, que las fuerzas y torques externos sean cero no garantiza que un rígido esté estático. Además, que su $\vec{v}_{cm} = 0$ no implica que todo el rígido esté estático (por ejemplo, un disco que rote con un $\vec{\omega}$ sobre un eje fijo).

   Además, si cambiamos el referencial a un punto que se esté moviendo, un cuerpo puede tener un $\vec{\omega}'$ o una $\vec{v}'$, aún estando estático.

   Por lo tanto, la única afirmación correcta es que $\boxed{\text{todas las anteriores son falsas}}$.

---

4. Como tenemos un sistema que usa la rapidez relativa de dos partículas que ejercen fuerzas centrales la una sobre la otra, podemos usar la masa reducida, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. La energía se conserva, entonces:

   $$K_i + U_i = K_f + U_f \implies \frac{1}{2}\mu v_o^2 - G\frac{m_1 m_2}{D} = \frac{1}{2}\mu v_f^2 - G\frac{m_1 m_2}{4D} \implies v_f = \sqrt{-3\frac{G m_1}{D}}$$

   La respuesta no tiene sentido, lo cual indica que los planetas no llegan a separarse hasta esa distancia. La respuesta es $\boxed{\text{ninguna de las anteriores}}$.

---

5. El momento angular se conserva, por lo tanto:

   $$L_i = L_f \implies d_a m v_a = \frac{1}{7} d_a m v_p \implies v_p = 7 v_a$$

   Sin embargo, eso nos permite hallar la magnitud solamente. Como $\vec{v}_a$ apunta en la dirección opuesta de $\vec{v}_p$, tenemos que $\boxed{\vec{v}_p = -7\vec{v}_a}$.

6. La energía se conserva, por ende:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \implies \frac{1}{2}mv_a^2 - G\frac{mM_S}{d_a} = \frac{1}{2}m9v_a^2 - G\frac{mM_S}{d_q} \implies \boxed{dq = \frac{GM_S d_a}{GM_S + 4d_a v_a^2}}$$

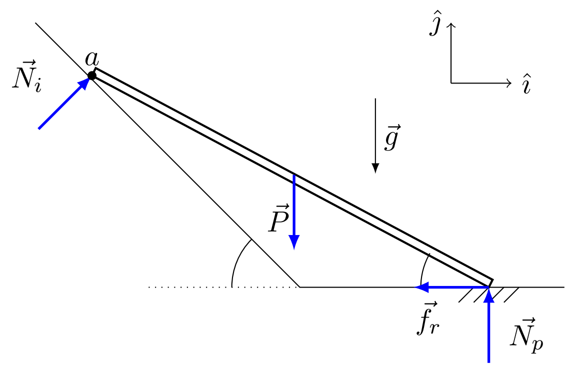
7. Hallamos una expresión para la rapidez usando la segunda ley de Newton:

$$G\frac{mM_t}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \implies v = \sqrt{\frac{GM_t}{R}}$$

Entonces $v_1 = \sqrt{\frac{GM_t}{R_1}}$ y $v_2 = \sqrt{\frac{GM_t}{9R_1}}$. Dividimos ambas para hallar la relación:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\frac{GM_t}{9R_1}}}{\sqrt{\frac{GM_t}{R_1}}} \implies \boxed{v_1 = \frac{1}{3}v_2}$$

8. A la derecha está el diagrama de fuerzas de la figura. Asumiremos que la dirección de la fricción es hacia la izquierda, pero las ecuaciones nos dirán si es en esa o en la otra dirección. Las ecuaciones de equilibrio, tomando el torque respecto al punto a, son:



$$\sum F_y = N_p - Mg + N_i \operatorname{sen} 45 = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_x = N_i \cos 45 - f_r = 0 \tag{2}$$

$$\sum \tau^a = N_p L \cos 45 - Mg\frac{L}{2}\cos 45 - f_r L \operatorname{sen} 45 = 0 \tag{3}$$

(a) De (2) tenemos que :

$$f_r = N_i \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}N_i \tag{4}$$

Simplificando (3) y substituyendo f_r obtenemos:

$$N_p - \frac{1}{2}Mg - \frac{\sqrt{2}}{2}N_i = 0 \tag{5}$$

Restando (1) a (4), resulta:

$$N_p - \frac{1}{2}Mg - \frac{\sqrt{2}}{2}N_i - N_p + Mg - \frac{\sqrt{2}}{2}N_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N_i = \frac{Mg}{2\sqrt{2}}}$$

(b) Sustituyendo N_i en (1), tenemos:

$$N_p - Mg + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Mg}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{N_p = \frac{3}{4}Mg}$$

(c) Sustituyendo N_i en (4):

$$\boxed{f_r = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Mg}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}Mg}$$

Como la fricción es positiva, entonces sí apunta hacia la izquierda, como asumimos inicialmente, es decir, $\vec{f_r} = f_r(-\hat{\imath})$.

Este parcial fue suministrado por el Prof. Kevin Ng y resuelto por Jean F. Gómez (15-10581) con asistencia del Prof. Ng para GUIAS USB

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com